Università degli Studi di Napoli Federico II

Un'introduzione alla Cosmologia Quantistica: risultati e prospettive.

Salvatore Samuele Sirletti

CISF 2019,
Dipartimento di Fisica,
Università degli Studi di Milano,
9 Marzo 2019.

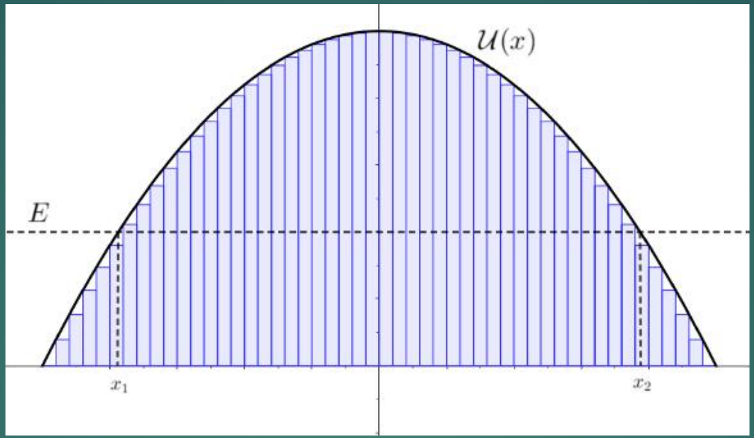
salvatoresamuele.sirletti@gmail.com

Sommario

- Richiami di Meccanica Quantistica: l'approssimazione Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB).
- Richiami di Cosmologia Classica.
- Cosmologia Quantistica: un'introduzione.
- Cosmologia Quantistica: un esempio di mini-superspazio.
- Conclusioni.

Richiami di Meccanica Quantistica

L'approssimazione di Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB)



- In un problema di effetto tunnel quantistico monodimensionale, se l'energia potenziale $\mathcal{U}(x)$ non ha la forma di un gradino perfetto, il problema può essere affrontato con il ***metodo di approssimazione semiclassica di Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB)***:

  1) Si imposta che la ψ abbia una ***forma esponenziale*** il cui argomento può essere sviluppato in serie di potenze di $\hbar$.

  2) Si divide l'intervallo della regione classicamente non permessa in tanti intervalli di spessore $\mathrm{d}x$ e altezza $\mathcal{U}(x)$ e quindi si vede il problema come ***trasmissione attraverso tanti gradini di potenziale***.

- ***L'equazione di Schrödinger*** del problema unidimensionale è:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\mathcal{U}(x)\psi(x)=E\psi(x)$$

- Si trova la ***soluzione*** al problema di tunneling:

$$\psi(x)=\frac{N_1}{\sqrt{k(x)}}\,e^{+i\int_{x_i}^{x}k(x')dx'}+\frac{N_2}{\sqrt{k(x)}}\,e^{-i\int_{x_i}^{x}k(x')dx'}$$

con x_i uguale ad uno dei punti di inversione di moto classici e

$$k(x)=\sqrt{\frac{2m[E-\mathcal{U}(x)]}{\hbar^2}}$$

- La ***probabilità di tunneling*** sarà

$$\mathcal{P}\ \cong\ e^{-\frac{2}{\hbar}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{2m[E-\mathcal{U}(x)]}dx}$$

- La probabilità dipende sempre fortemente dalla massa e dalla larghezza della regione di tunneling, come per il gradino di potenziale.
- La soluzione diverge nei punti di inversione di moto dove $E=\mathcal{U}(x)$: per tale problema esistono formule di raccordo dette ***formule di connessione.***

Richiami di Cosmologia Classica:
Il principio cosmologico

- L'Universo, visto su scala sufficientemente grande (***scala cosmologica***, $\sim 20\ Mpc$), appare omogeneo e isotropo, ovvero identico in tutte le direzioni in cui lo si osserva.

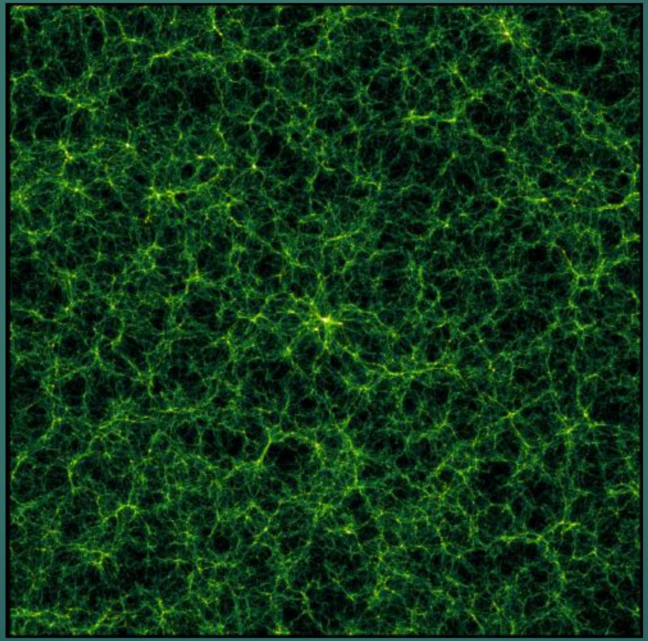


Figura: Spettro di emissione di un volume di galassie di $\sim 3\mathrm{Gpc}$ fotografato dall'esperimento WiggleZ survey.

Richiami di Cosmologia Classica:

Densità, fattore di scala dell'Universo e sistema di equazioni di Friedmann.

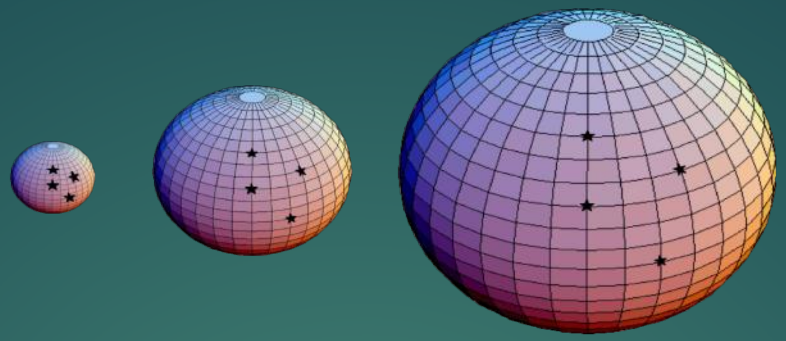
- Assumendo valido il principio cosmologico e che l'Universo sia in ***espansione***, si può:

  1) Considerare che l'Universo abbia una ***densità costante spazialmente*** ad ogni istante fissato: $\rho = \rho(t)$.

  2) Definire il ***sistema di coordinate comoventi***: tali sono coordinate che si muovono, sono solidali, con l'espansione dell'Universo e quindi restano costanti durante quest'ultima.

  $$\vec{r} = a(t)\vec{x}$$

  dove $a(t)$ è chiamato ***fattore di scala dell'Universo*** ed indica come questo si espande.



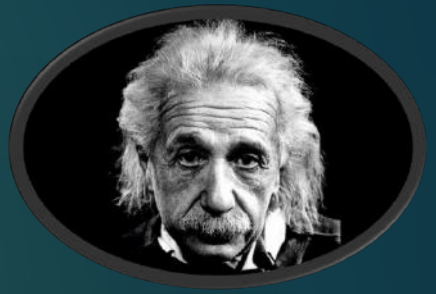
- Da tali assunzioni è possibile trovare il sistema di equazioni che regolano la dinamica dell'Universo, il ***sistema di equazioni di Friedmann***:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \dfrac{8}{3}\pi G\rho - \dfrac{k}{a^2} \\ \dot{\rho} = -\dfrac{3\,\dot{a}}{a}(\rho + p) \\ \dfrac{\ddot{a}}{a} = -\dfrac{4}{3}\pi G(\rho + 3p) \end{cases}$$

dove p è un fattore di ***pressione della materia***, k un ***parametro*** detto ***di curvatura spaziale***.

- La prima ***equazione*** è chiamata ***di Friedmann***;
- La seconda è chiamata ***equazione del fluido***;
- La terza è chiamata ***equazione dell'accelerazione***.

Richiami di Cosmologia Classica:
Relatività generale e legami con le equazioni di Friedmann.



- Il ***sistema di equazioni di Einstein***

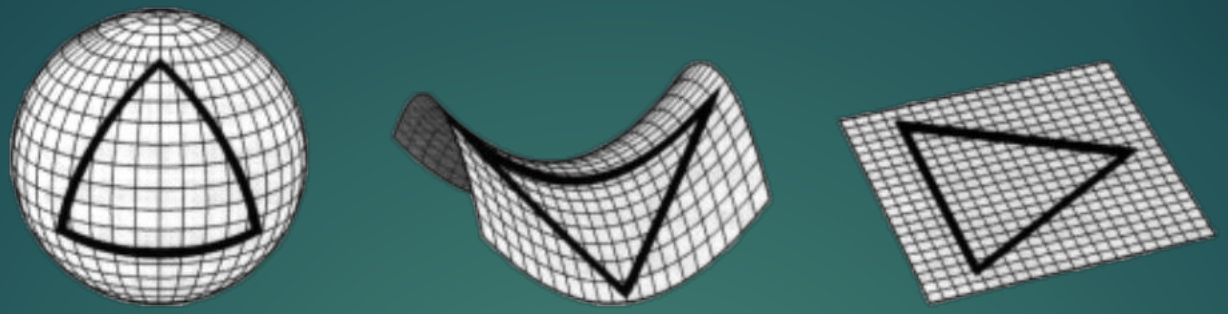
$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

è quello che regola la geometria e la dinamica dell'Universo in Relatività Generale in quanto mette in relazione essa con la distribuzione di massa.

Il principio cosmologico introduce ***simmetrie molto forti*** e permette di poter riscrivere la metrica nella forma

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2(\vartheta) d\varphi^2 \right]$$

detta ***metrica di Friedmann-Robertson-Walker (FRW).***
Si dimostra che, introdotta tale metrica, il sistema di Einstein dà origine a quello di Friedmann.



- Un Universo dove è possibile definire la metrica FRW, dominato quindi su larga scala dal principio cosmologico, è chiamato per analogia ***Universo FRW***.
- Il fattore k può assumere diversi valori e determina la ***geometria globale*** dell'Universo FRW.
  - Per $k = 1$ si ha un Universo sferico;
  - Per $k = -1$ si ha un Universo iperbolico;
  - Per $k = 0$ si ha un Universo piatto.

Introduzione alla Cosmologia Quantistica

Dopo la prima metà del XX secolo la fisica teorica si è mossa verso una ***teoria d'unificazione*** della Meccanica Quantistica e della Relatività Generale.

- Uno degli approcci teorici fu proposto da Wheeler e DeWitt: la ***quantizzazione canonica della Relatività Generale***.
- La formulazione generale dell'approccio di Wheeler-DeWitt è ***valida per ogni tipo di metrica***.
- Un grande vantaggio di tale approccio è quello ***di disporre di una formulazione hamiltoniana*** della Relatività Generale, necessaria per effettuare la quantizzazione.

- Si perviene ad un'equazione analoga a quella di Schrödinger, l'equazione di Wheeler-DeWitt:

$$\mathcal{H}\Psi = 0$$

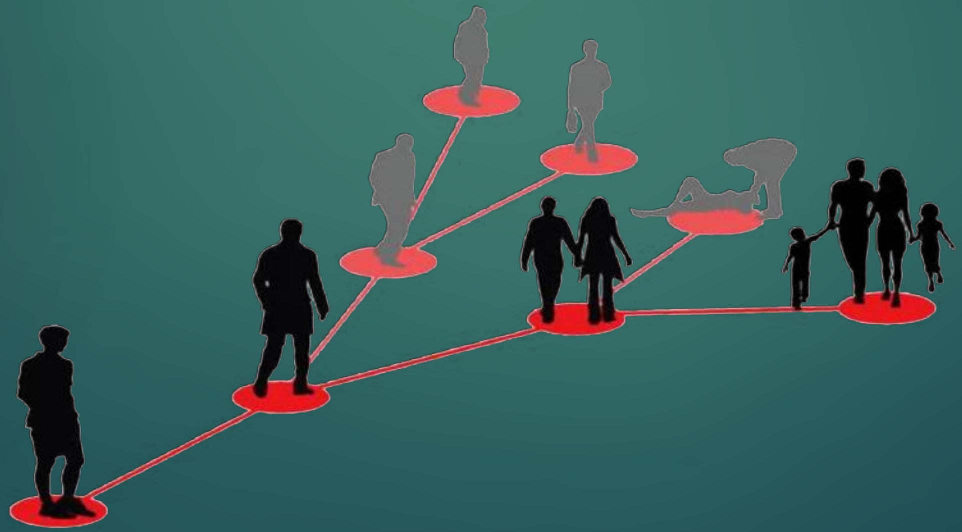
- Ψ è un funzionale definito sullo spazio di tutte le possibili metriche e campi scalari di materia definibili, il ***superspazio***.
- Come sotto-teoria nasce la Cosmologia Quantistica che tenta di spiegare come l'Universo abbia avuto origine.

Cosmologia Quantistica
L'interpretazione della probabilità

- L'interpretazione di Copenaghen è inadatta: l'Universo è unico nella sua interezza e non possono esserci osservatori esterni che compiono misure.

$$\Downarrow$$

- Problema di una ***corretta interpretazione della Ψ e della probabilità*** che restituisce.



Cosmologia Quantistica

L’interpretazione a molti mondi

- ***Una misura*** su uno stato Ψ, somma di autostati Ψ_i, ***fa scindere l’Universo*** in i Universi dove in ognuno di essi l’auto-stato i –esimo è certo.

$$\Psi = a\Psi_1 + b\Psi_2 \Longrightarrow \begin{cases} Un\ Universo\ dove\ \Psi = \Psi_1 \\ Un\ Universo\ dove\ \Psi = \Psi_2 \end{cases}$$

- ***L’osservatore*** qui ***non ha un ruolo fondamentale*** poiché esso evolve insieme con l’Universo stesso: non esistono misure esterne ma solo misure relative; lo stato globale comprende anche l’osservatore ed evolve in modo indipendente e deterministico.

- Hartle e Gell-Mann hanno dimostrato che l’interpretazione di Copenaghen ***emerge*** come caso limite quando l’Universo è abbastanza grande.

Cosmologia Quantistica
Il modello semplice per Universo FRW sferico vuoto

- ***I problemi della Cosmologia Classica***: assumendo valida la teoria del Big Bang, la Relatività Generale e la Cosmologia Classica non riescono a spiegare la singolarità iniziale, la nucleazione dal nulla e la creazione di materia dal nulla.
- La Cosmologia Quantistica potrebbe risolvere questi problemi:
  - La nucleazione potrebbe avvenire ***tramite effetto tunnel***;
  - E' possibile spiegare la nucleazione dal vuoto tramite il concetto di ***falso vuoto*** e ***densità di energia del vuoto***, ovvero tramite fluttuazioni quantistiche.
- Il modello più semplice che si può costruire è per un ***Universo FRW vuoto*** e Atkatz e Pagels hanno dimostrato che solo un Universo chiuso può enucleare tramite effetto tunnel. Cioè ci si pone a $k = 1$, sul ***minisuperspazio monodimensionale*** $0 < a < \infty$.

- $\rho = \rho_{vacuum}$.
- Si dimostra che in tal caso è possibile scrivere $p(\rho) = -\rho_{vac}$ (in unità naturali).
- L'equazione di Friedmann diventa allora

$$\dot{a}^2 + \left(1 - \frac{\Lambda}{3}a^2\right) = 0 \quad con \quad \Lambda = 8\pi G \rho_{vac}$$

- Risolvendo tale equazione si trova

$$a(t) = a_0 \cosh\left(\frac{t}{a_0}\right) \quad con \quad \mathrm{a}_0 = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}$$

Il suo grafico è in accordo con la ***teoria inflazionaria di Guth***: a $t = 10^{-34}s$, per un tempo $\Delta t = 10^{-30}s$, l'Universo si è espanso di un fattore 10^{50}; ha subito ***inflazione***.

- L'equazione da quantizzare è quella di Friedmann ed è possibile già vederla come ***Hamiltoniana***:
  - $\dot{a}^2$ =termine cinetico;
  - $\left(1 - \frac{\Lambda}{3}a^2\right)$= termine potenziale.

- Per ***quantizzare canonicamente*** dobbiamo però esprimere in funzione del momento cinetico.
- Dall'azione di Hilbert-Einstein si trova

$$\mathcal{L} = \frac{3\pi}{4G}\left[-a\dot{a}^2 + a\left(1 - \frac{a^2}{a_0^2}\right)\right]$$

- Quindi

$$p_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}} = -\frac{3\pi}{2G}\dot{a}a$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{H} = p_a\dot{a} - \mathcal{L}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{H} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_a\dot{a} - \mathcal{L} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$p_a^2 + \left(\frac{3\pi}{2G}\right)^2 a^2\left(1 - \frac{a^2}{a_0^2}\right) = 0$$

- Possiamo ora effettuare la ***quantizzazione canonica***

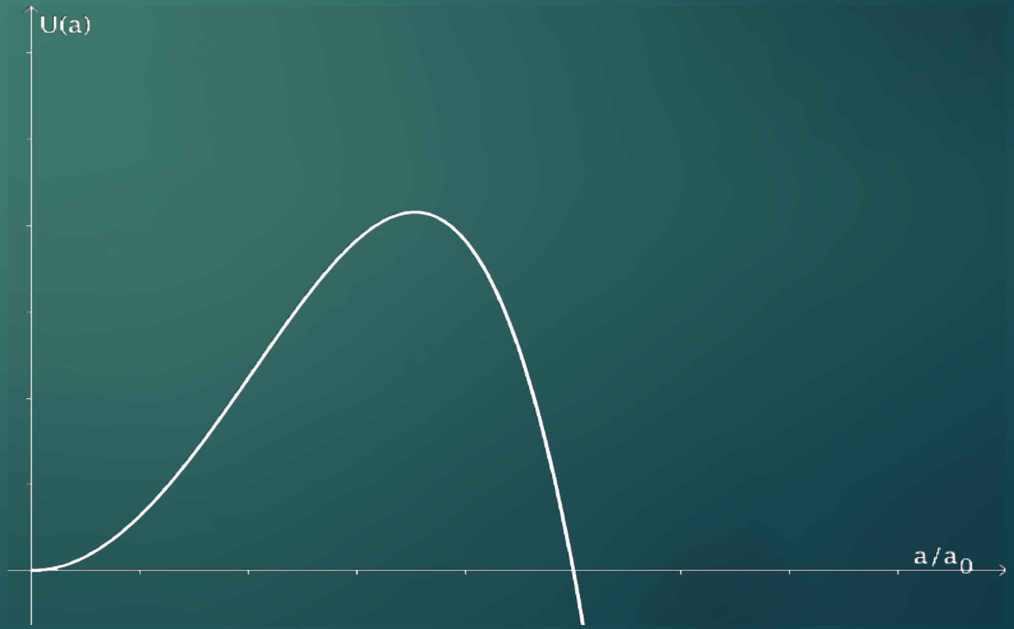
$$p_a \to \widehat{P_a} = -i\,\frac{\partial}{\partial a}$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial a^2} - \left(\frac{3\pi}{2G}\right)^2 a^2\left(1-\frac{a^2}{a_0^2}\right)\right]\psi(a) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{H}\psi(a) = 0$$

- ***L'equazione di Wheeler-DeWitt*** in tal caso è caratterizzata da:
  - ψ è solo funzione di a in quanto in tal caso è solo esso a determinare la ***geometria*** (raggio sfera);
  - $m = \frac{1}{2}$;
  - $\mathcal{U}(a) = \left(\frac{3\pi}{2G}\right)^2 a^2\left(1-\frac{a^2}{a_0^2}\right)$.

$\Longrightarrow$



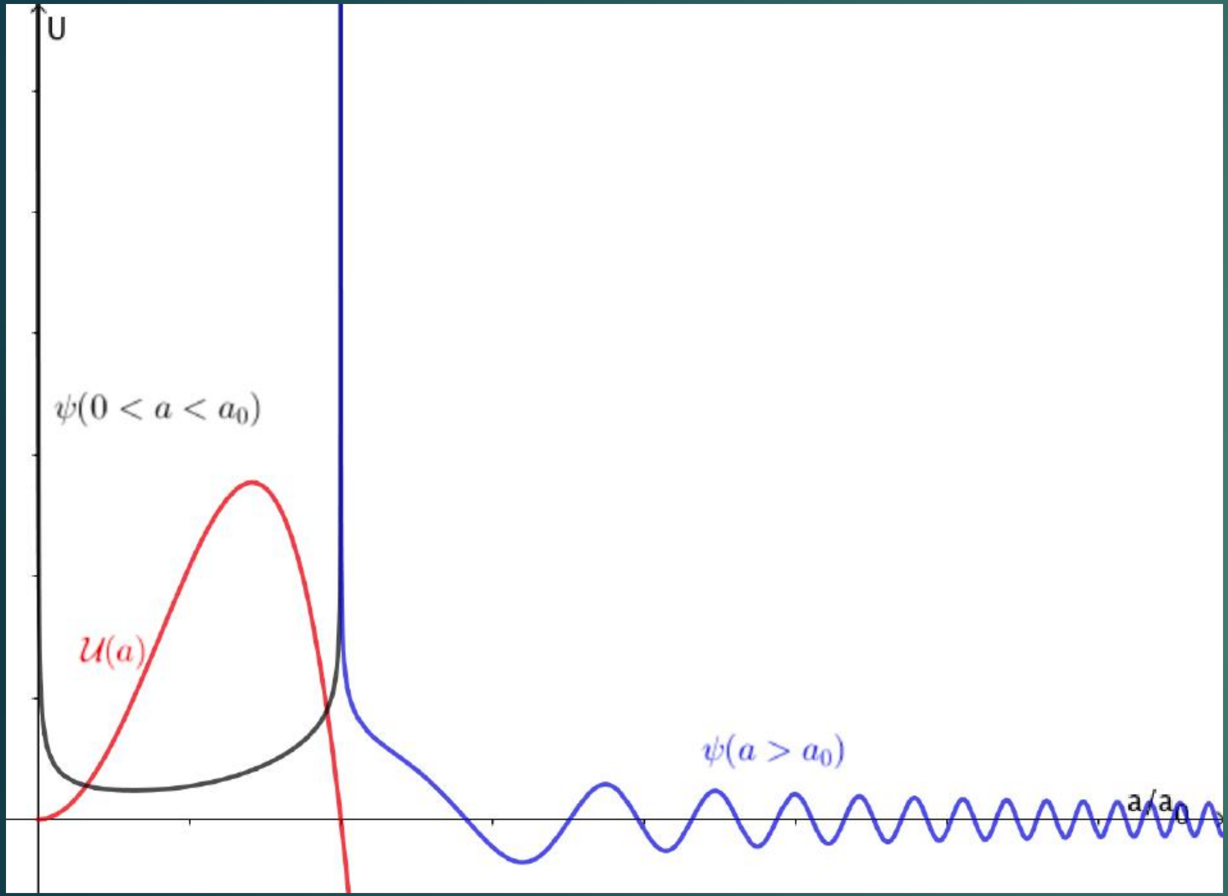
$\Longleftarrow$

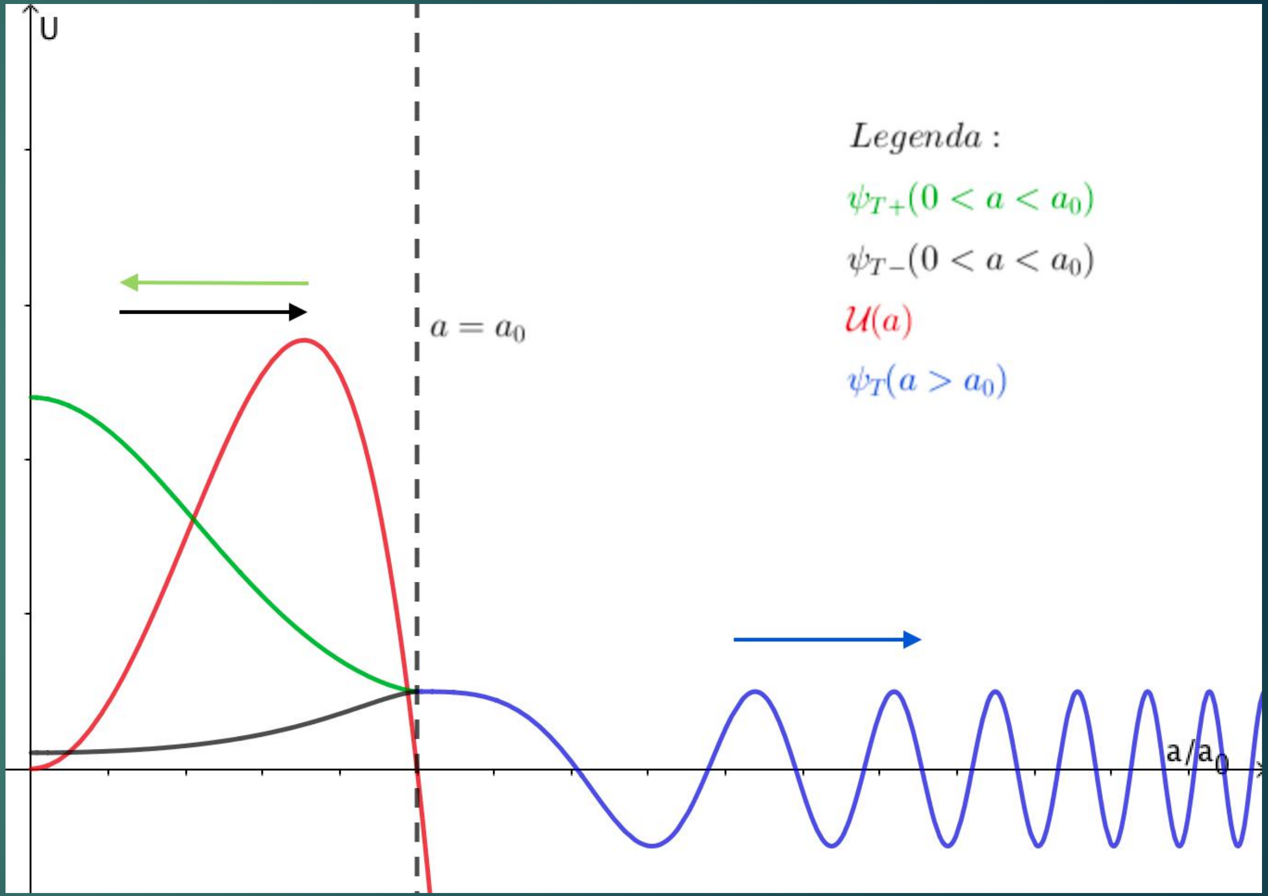
L'Universo si è generato con energia nulla tramite ***effetto tunnel*** attraversando la barriera da 0 ad $a = a_0$.

- Tramite ***l'approssimazione WKB*** possiamo risolvere il problema in esame.
- Esistono diverse proposte sulla ψ: le principali sono ψ_T e ψ_{HH}.

- La ***ψ di tunneling***:
  - $$\psi_T(a > a_0) = \frac{N}{\sqrt{k(a)}}\, e^{-i\frac{\pi}{2G}a_0^2\left(\frac{a^2}{a_0^2}-1\right)^{3/2}} \qquad con \qquad k(a) = \sqrt{-\mathcal{U}(a)} = \left(\frac{3\pi}{2G}\right) a \left(\frac{a^2}{a_0^2}-1\right)^{1/2}$$
  - $$\psi_T(0 < a < a_0) = \frac{1}{\sqrt{\kappa(a)}}\left[\tilde{C} e^{-\frac{\pi}{2G}a_0^2\left(1-\frac{a^2}{a_0^2}\right)^{\frac{3}{2}}} + \widetilde{D} e^{+\frac{\pi}{2G}a_0^2\left(1-\frac{a^2}{a_0^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\right] \quad con \quad k(a) = i\left(\frac{3\pi}{2G}\right) a \left(1-\frac{a^2}{a_0^2}\right)^{1/2} = i\kappa(a)$$

$$\mathcal{P} \cong e^{-\frac{3\pi}{2G}\int_0^{a_0} a\left(1-\frac{a^2}{a_0^2}\right)^{\frac{1}{2}} da} = e^{-\frac{3}{8G^2\rho_{vac}}}$$

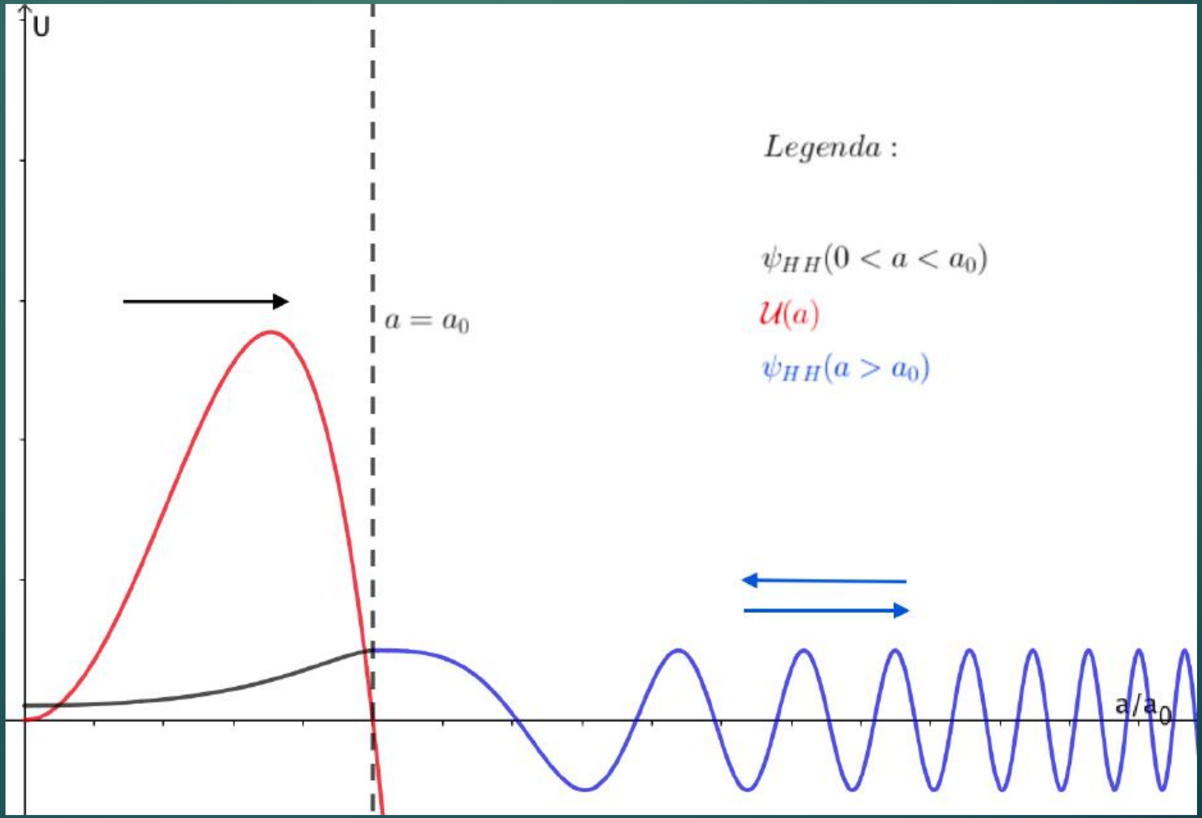

U
$\psi(0 < a < a_0)$
$\mathcal{U}(a)$
$\psi(a > a_0)$
a/a$_0$


U
$a = a_0$
$Legenda:$
$\psi_{T+}(0 < a < a_0)$
$\psi_{T-}(0 < a < a_0)$
$\mathcal{U}(a)$
$\psi_T(a > a_0)$
a/a$_0$

- La ψ ***di Hartle e Hawking***:

  - $$\psi_{HH}(a > a_0) = \frac{N}{\sqrt{k(a)}}\cos\left[\frac{\pi}{2G}a_0^2\left(\frac{a^2}{a_0^2} - 1\right)^{3/2}\right];$$

  - $$\psi_{HH}(0 < a < a_0) \equiv \psi_{T-}(0 < a < a_0) = \frac{\tilde{C}}{\sqrt{\kappa(a)}}e^{-\frac{\pi}{2G}a_0^2\left(1-\frac{a^2}{a_0^2}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$



Conclusioni

Riassumendo

Fatti i dovuti richiami di Meccanica Quantistica e Cosmologia Classica, abbiamo

- Introdotto la Teoria della Quantizzazione della Gravità secondo Wheeler e DeWitt e la Cosmologia Quantistica;
- Sviluppato un modello semplice di tale teoria per mostrarne i punti forti.

Punti di forza del modello di Universo FRW sferico vuoto

- ***Semplicità*** di formulazione;
- Alla base di ***modelli più complessi***, non vuoti.

Conclusioni

Risultati

La cosmologia quantistica è

- Probabilmente in grado di risolvere il problema di nucleazione dal nulla dell'Universo da una singolarità iniziale;
- Coerente e ben posta: data la scala iniziale dell'Universo non si può non tener conto degli effetti quantistici.

Prospettive future

- Individuazione della corretta funzione di stato ψ;
- Comprensione del meccanismo di fondo per cui una data configurazione dell'Universo è preferita rispetto ad un'altra;
- Individuazione del corretto significato della ψ e della probabilità che restituisce;
- Creazione di modelli matematici che permettono di lavorare con modelli più complessi.